102 年四技二專統測試題

《數學(C)》

答案來源：技專校院入學測驗中心

啓芳出版社 提供

試題分析

102 數 C 統測試題多著重基本觀念的融會貫通以及代數運算，與去年相比較少複雜的幾何圖形題目，增加了兩題統計題型（加權平均與常態分配），除了不等式、數列與級數、圓沒有出現相關題型，其餘各章節大致分布平均，可說是份兼顧觀念與運算的考題。許多題目數字設計看似複雜，但其實若多應用定義及觀念，將可大幅減少運算時間以及避免計算錯誤，例如第 6 題利用廣義三角函數觀念、第 7 題加權平均利用平移概念解題、第 8 題直接利用雙曲線定義，第 17 題利用棣美弗定理、第 20 題宜多利用行列式性質解題、第 24 題利用兩平行線距離公式；若能穩健作答、靈活所學，將可獲得高分。

(B) 1. 求 102 到 2013 之間，個位數字爲 7 的正整數共有幾個？ (A)190 (B)191 (C)192 (D)193。

解析：102 到 2013 之間中個位數字爲 7，先討論三位數、再討論四位數，

$\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{7}$：$9\times10=90$

$\boxed{1}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{7}$：$10\times10=100$

$\boxed{2}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{7}$：1

共 $90+100+1=191$

參閱課本：數學 CⅢ《Ch3》P.94 習題 3

參閱講義：W04 講義《Ch10》P.238 例題 8

(D) 2. 已知 m、n 爲實數，$Q(x)$ 爲二次多項式。若 $x^4-mx^3-x^2-5x+n=(x^2-3x+2)Q(x)$，則 $2m+n=$？ (A)-6 (B)-2 (C)4 (D)8。

解析：令 $f(x)=x^4-mx^3-x^2-5x+n=(x^2-3x+2)Q(x)=(x-1)(x-2)Q(x)$，

故 $f(x)$ 有 $(x-1)$ 與 $(x-2)$ 的因式，即 $f(1)=0$ 且 $f(2)=0$，

$$\Rightarrow\begin{cases}1-m-1-5+n=0\\16-8m-4-10+n=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-m+n=5\\-8m+n=-2\end{cases}\Rightarrow m=1，n=6\Rightarrow 2m+n=8$$

參閱課本：數學 CⅡ《Ch1》P.28 例題 9

參閱講義：W04 講義《Ch4》P.114 教師講解 2

(C) 3. 若 $3^{x+2}=3^x+24\sqrt{3}$，則 $x=$？ (A)$\dfrac{-1}{2}$ (B)1 (C)$\dfrac{3}{2}$ (D)2。

解析：$3^{x+2}=3^x+24\sqrt{3}\Rightarrow 3^{x+2}-3^x=24\sqrt{3}\Rightarrow 3^2\cdot3^x-3^x=24\sqrt{3}\Rightarrow 8\cdot3^x=24\sqrt{3}$

$$\Rightarrow 3^x=3\sqrt{3}\Rightarrow 3^x=3\cdot3^{\frac{1}{2}}\Rightarrow 3^x=3^{\frac{3}{2}}\Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

參閱課本：數學 CⅢ《Ch2》P.35 習題 5

參閱講義：W04 講義《Ch9》P.219 教師講解 2

(D) 4. 已知 $a>0$，$b>0$，$a\neq 1$。若 $a^5=b^3$，則 $\log_a b=$？ (A)$\frac{-5}{3}$ (B)$\frac{-3}{5}$ (C)$\frac{3}{5}$ (D)$\frac{5}{3}$。

解　析：$a^5=b^3 \Rightarrow a^{\frac{5}{3}}=b$，由指數與對數的定義可知，$\log_a^b=\frac{5}{3}$

參閱課本：數學 CⅢ《Ch2》P.37 例題 2

參閱講義：W04 講義《Ch9》P.214 教師講解 2

(D) 5. 求 $\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{3}{2}}(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3})dx$？ (A)$\frac{97}{36}$ (B)$\frac{49}{18}$ (C)$\frac{17}{6}$ (D)$\frac{26}{9}$。

解　析：$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3})dx=(x+\frac{x^2}{2\cdot 2}+\frac{x^3}{3\cdot 3})\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}$

$=[\frac{3}{2}+\frac{1}{4}(\frac{3}{2})^2+\frac{1}{9}(\frac{3}{2})^3]-[(-\frac{1}{2})+\frac{1}{4}(-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{9}(-\frac{1}{2})^3]$

$=(\frac{3}{2}+\frac{9}{16}+\frac{27}{72})-(-\frac{1}{2}+\frac{1}{16}-\frac{1}{72})=\frac{26}{9}$

參閱課本：數學 CⅣ《Ch2》P.167 例題 8

參閱講義：W04 講義《Ch13》P.377 教師講解 1

(A) 6. 若 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=5$、$\overline{BC}=9$、$\overline{CA}=10$，則 $\cos(\angle A+\angle B)=$？ (A)$\frac{-13}{15}$ (B)$\frac{-7}{15}$ (C)$\frac{7}{15}$ (D)$\frac{13}{15}$。

解　析：$\triangle ABC$ 中，$\angle A+\angle B+\angle C=\pi$

$\cos(A+B)=\cos(\pi-C)=-\cos C=-\frac{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-\overline{AB}^2}{2\overline{AC}\cdot\overline{BC}}=-\frac{10^2+9^2-5^2}{2\times 10\times 9}=-\frac{13}{15}$

參閱課本：數學 CⅠ《Ch2》P.86 例題 4 & P.146 例題 9

參閱講義：W04 講義《Ch2》P.60 教師講解 4

(D) 7. 某生的測驗成績與相對上課時數如表。若以上課時數爲權數，則其 6 個科目的加權平均成績爲何？ (A)71 (B)72 (C)73 (D)74。

科目	國文	英文	數學	歷史	地理	公民
成績	72	68	72	82	75	86
時數	5	4	4	2	2	2

解　析：先將各科分數減掉 72，得

科目	國文	英文	數學	歷史	地理	公民
成績	72	68	72	82	75	86
成績 −72	0	−4	0	10	3	14
時數	5	4	4	2	2	2

加權平均爲 $\frac{0\times 5+(-4)\times 4+0\times 4+10\times 2+3\times 2+14\times 2}{5+4+4+2+2+2}+72=\frac{38}{19}+72=74$

參閱課本：數學 CⅢ《Ch4》P.169 例題 3

參閱講義：W04 講義《Ch11》P.289 教師講解 2

(B) 8. 設雙曲線的兩焦點分別爲 $F(-3,2)$、$F'(5,2)$，且此雙曲線過點 $P(5,\frac{13}{3})$，則此雙曲線的貫軸長爲何？ (A)3 (B)6 (C)7 (D)14。

解　析：利用雙曲線的定義，

兩焦點爲 F、F'，雙曲線上任一點 P 皆滿足 $\left|\overline{PF}-\overline{PF'}\right|=2a$，

故本題所求貫軸長爲 $2a$，

即 $2a=\left|\sqrt{(5-(-3))^2+(\frac{13}{3}-2)^2}-\sqrt{(5-5)^2+(\frac{13}{3}-2)^2}\right|=\left|\frac{25}{3}-\frac{7}{3}\right|=\frac{18}{3}=6$

參閱課本：數學 CⅣ《Ch1》P.81 習題 5

參閱講義：W04 講義《Ch12》P.348 基礎評量 14

(A) 9. 設向量 $\overrightarrow{a}=(3,4)$，向量 $\overrightarrow{b}\,//\,\overrightarrow{a}$，且 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=-50$，則 $|2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}|=$？ (A)20 (B)40 (C)60 (D)80。

解　析：由 $\overrightarrow{a}=(3,4)$，可得 $|\overrightarrow{a}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$

由 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=-50\Rightarrow\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$

$\Rightarrow 5\times|\overrightarrow{b}|\times\cos180^\circ=-50$（$\because\overrightarrow{b}\,//\,\overrightarrow{a}$ $\therefore\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 夾角 θ 爲 180°）

可得 $|\overrightarrow{b}|=10$，

故 $|2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}|^2=4|\overrightarrow{a}|^2+12\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+9|\overrightarrow{b}|^2=4(5)^2+12(-50)+9(10)^2=400$，

即 $|2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}|=\sqrt{400}=20$

參閱課本：數學 CⅠ《Ch3》P.210 例題 7

參閱講義：W04 講義《Ch3》P.91 教師講解 5

(A)10. 求多項式 $(2x-1)^5(x+1)$ 之 x^2 項的係數爲何？ (A)-30 (B)-20 (C)20 (D)30。

解　析：$(2x-1)^5(x+1)$ 中 x^2 項的係數，

即 $(2x-1)^5$ 展開式中

$$[\cdots+C_2^5(2x)^2(-1)^3+C_1^5(2x)(-1)^4+\cdots](x+1)$$

故 x^2 項的係數爲 $C_2^5(2)^2(-1)^3+C_1^5(2)^1(-1)^4=-30$

參閱課本：數學 CⅢ《Ch3》P.104 例題 2

參閱講義：W04 講義《Ch10》P.255 自我評量 9

(D)11. 已知 $a>0$，且方程組 $\begin{cases}-x+3y=ax\\3x+y=ay\end{cases}$ 有無限多組解，則 $a=$？ (A)1 (B)$\sqrt{2}$ (C)$\sqrt{5}$ (D)$\sqrt{10}$。

解　析：$\begin{cases}-x+3y=ax\\3x+y=ay\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(-1-a)x+3y=0\\3x+(1-a)y=0\end{cases}$

$\because$方程組有無限多組解 $\therefore\frac{-1-a}{3}=\frac{3}{1-a}$，

即 $a^2=10\Rightarrow a=\pm\sqrt{10}$ ($a>0$)，故 $a=\sqrt{10}$

參閱課本：數學 CⅠ《Ch1》P.37 例題 14 & 數學 CⅡ《Ch2》P.81 例題 14

參閱講義：W04 講義《Ch1》P.14 教師講解 4 & 《Ch5》P.142 教師講解 2

(C)12. 已知θ為第三象限角，且$\tan\theta=\frac{3}{4}$，則$\frac{2\sin\theta-1}{3+4\cos\theta}=$？　(A)$\frac{1}{31}$　(B)$\frac{13}{7}$　(C)11　(D)31。

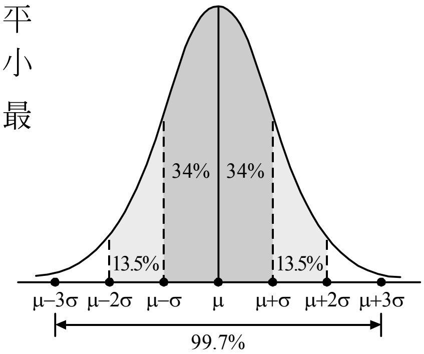
解　析：θ為第三象限角且$\tan\theta=\frac{3}{4}$，可得$\sin\theta=-\frac{3}{5}$、$\cos\theta=-\frac{4}{5}$，

則$\frac{2\sin\theta-1}{3+4\cos\theta}=\frac{2(-\frac{3}{5})-1}{3+4(-\frac{4}{5})}=11$

參閱課本：數學 CⅠ《Ch3》P.85 例題 3

參閱講義：W04 講義《Ch2》P.47 自我評量 13

(B)13. 某校全體新生測量身高結果近似常態分配，如圖。若身高的平均數μ為 170 公分，標準差σ為 4 公分，且全體新生中身高小於 166 公分的人數約為 120 人，則此校新生人數與下列何者最接近？　(A)375　(B)750　(C)1125　(D)1500。



解　析：令全校人數為x，

則低於 166 公分的人數占全校的

$100\%-50\%-34\%=16\%$

故$\frac{120}{x}=\frac{16}{100}\Rightarrow x=750$，即全校約有 750 人

參閱課本：數學 CⅢ《Ch3》P.200 例題 1

參閱講義：W04 講義《Ch11》P.304 教師講解 1

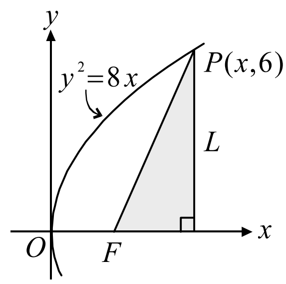
(C)14. 已知甲、乙、丙三人搭同一班次火車，此班火車有 5 節車廂。若每人選擇搭乘各車廂的機率均為$\frac{1}{5}$，則此三人分別在不同車廂的機率為何？　(A)$\frac{1}{25}$　(B)$\frac{2}{25}$　(C)$\frac{12}{25}$　(D)$\frac{24}{25}$。

解　析：所求為$C_3^5\times(\frac{1}{5})^3\times3!=\frac{60}{125}=\frac{12}{25}$

參閱課本：數學 CⅢ《Ch3》P.132 例題 5

參閱講義：W04 講義《Ch11》P.276 教師講解 3

(A)15. 已知點$P(x,6)$為拋物線$y^2=8x$上一點，F為此拋物線的焦點，L為過點P且與x軸垂直的直線，如圖。求由$\overline{PF}$、L與x軸所圍成的三角形面積為何？　(A)$\frac{15}{2}$　(B)8　(C)$\frac{17}{2}$　(D)9。



解　析：拋物線$y^2=8x$，$4c=8\Rightarrow c=2$（開口向右），

焦點坐標為$F(2,0)$，

$P(x,6)$為拋物線上一點，$6^2=8x\Rightarrow x=\frac{9}{2}$，

故所求面積為$\frac{1}{2}\times(\frac{9}{2}-2)\times6=\frac{15}{2}$

參閱課本：數學 CⅣ《Ch1》P.38 例題 6

參閱講義：W04 講義《Ch12》P.329 學生練習 4

(D)16. 已知 a、b 爲實數，$f(x)=(ax+b)^3$。若 $f(2)=1$ 且 $f'(2)=6$，則 $a-b=$？ (A) -2 (B) -1 (C)3 (D)5。

解析：由 $f(x)=(ax+b)^3$，可得 $f'(x)=3(ax+b)^2(a)$

將 $f(2)=1$、$f'(2)=6$ 代入，得 $\begin{cases}(2a+b)^3=1\\3(2a+b)^2a=6\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2a+b=1\\3\times1^2\times a=6\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=2\\b=-3\end{cases}$，

故 $a-b=2-(-3)=5$

參閱課本：數學 CⅣ《Ch2》P.135 例題 9

參閱講義：W04 講義《Ch13》P.368 學生練習 2

(C)17. 已知 a、b 爲實數，$i=\sqrt{-1}$。若 $(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i})^8=a+bi$，則 $a^2+b^2=$？ (A)16 (B)64 (C)256 (D)1024。

解析：$(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i})^8=a+bi \Rightarrow \left|\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right|^8=|a+bi| \Rightarrow (\frac{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}{\sqrt{1^2+(-1)^2}})^8=\sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow (\sqrt{2})^8=\sqrt{a^2+b^2}$

即 $\sqrt{a^2+b^2}=16$，故 $a^2+b^2=16^2=256$

參閱課本：數學 CⅡ《Ch3》P.119 例題 4 & P.108 例題 3

參閱講義：W04 講義《Ch6》P.160 自我評量 1 & P.157 教師講解 1

(C)18. 若 $2+3\cos 2\theta=0$，則 $\sin^4\theta-\cos^4\theta=$？ (A) $\frac{-\sqrt{5}}{3}$ (B) $\frac{-2}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{5}}{3}$。

解析：$2+3\cos 2\theta=0 \Rightarrow \cos 2\theta=-\frac{2}{3}$，

$\sin^4\theta-\cos^4\theta=(\sin^2\theta)^2-(\cos^2\theta)^2=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^2\theta-\cos^2\theta)=1\cdot(-\cos 2\theta)=\frac{2}{3}$

參閱課本：數學 CⅠ《Ch2》P.135 習題 8

參閱講義：W04 講義《Ch2》P.72 進階評量 23

(B)19. 已知 a、b、c 爲實數，若 $x\neq\frac{3}{2}$ 時，等式 $\frac{4x^2-6x-3}{(2x-3)^2}=a+\frac{b}{2x-3}+\frac{c}{(2x-3)^2}$ 恆成立，則 $a+b+2c=$？

(A) -4 (B) -2 (C)2 (D)4。

解析：$\frac{4x^2-6x-3}{(2x-3)^2}=a+\frac{b}{2x-3}+\frac{c}{(2x-3)^2}$，

$4x^2-6x-3=a(2x-3)^2+b(2x-3)+c$，

展開比較係數得 $a=1$、$b=3$、$c=-3$，

故 $a+b+2c=-2$

參閱課本：數學 CⅡ《Ch2》P.53 習題 7

參閱講義：W04 講義《Ch4》P.122 教師講解 2

(B)20. 若三階行列式 $\begin{vmatrix}x&13&16\\11&14&17\\12&15&18\end{vmatrix}$ 之值爲 3，則三階行列式 $\begin{vmatrix}x+2&13&16\\11&14&17\\12&15&18\end{vmatrix}$ 之值爲何？ (A) -9

(B) -3 (C)3 (D)9。

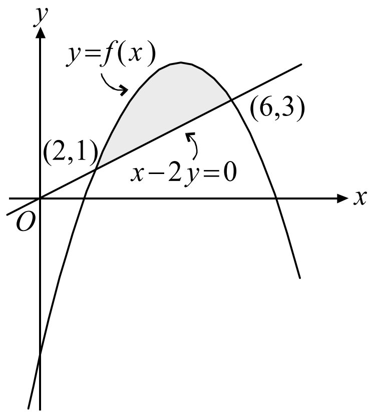
解析：$\begin{vmatrix}x+2&13&16\\11&14&17\\12&15&18\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x&13&16\\11&14&17\\12&15&18\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&13&16\\0&14&17\\0&15&18\end{vmatrix}=3+2\times(14\times18-15\times17)=-3$

參閱課本：數學 CⅡ《Ch2》P.75 例題 8

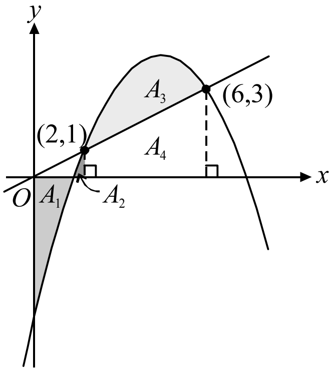
參閱講義：W04 講義《Ch5》P.139 教師講解 9

(C)21. 已知 $y=f(x)$ 與 $x-2y=0$ 相交於 $(2,1)$、$(6,3)$ 兩點，如圖。若陰影部份的面積為 $\frac{16}{3}$ 且 $\int_0^2 f(x)dx=\frac{-13}{3}$，則 $\int_0^6 f(x)dx=$？

(A)7　(B)8　(C)9　(D)10。



解　析：



令各區域的積分為 A_1、A_2、A_3、A_4，

由 $\int_0^2 f(x)dx=-\frac{13}{3}$，即 $A_1+A_2=-\frac{13}{3}$、陰影部分面積為 $A_3=\frac{16}{3}$

而所求為 $A_1+A_2+A_3+A_4=-\frac{13}{3}+\frac{16}{3}+A_4$

又 $A_4=\frac{(1+3)\times 4}{2}=8$（為一梯形），故所求為 $1+8=9$

參閱課本：數學 CⅣ《Ch2》P.171 例題 2

參閱講義：W04 講義《Ch13》P.376 學生練習 1

(A)22. 已知 a、b 為實數。若直線 $2x+ay+b=0$ 通過 $10x-2y+5=0$ 與 $6x-y+7=0$ 之交點，且斜率為 2，則 $a+b=$？　(A) -12　(B) -10　(C)10　(D)12。

解　析：直線 $2x+ay+b=0$ 的斜率為 2，即 $-\frac{2}{a}=2$，得 $a=-1$，

且直線通過 $\begin{cases}10x-2y+5=0\\6x-y+7=0\end{cases}$ 的交點，解聯立方程組，可得交點 $(-\frac{9}{2},-20)$，

將點 $(-\frac{9}{2},-20)$ 代入 $2x-y+b=0 \Rightarrow 2(-\frac{9}{2})-(-20)+b=0 \Rightarrow b=-11$，

故 $a+b=-12$

參閱課本：數學 CⅠ《Ch1》P.36 例題 13

參閱講義：W04 講義《Ch1》P.25 自我評量 10

(B)23. 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{5x^2-2x-3} &, x\neq 1\\ C &, x=1\end{cases}$。若 f 在 $x=1$ 處連續，則 $C=$？　(A) $\frac{1}{8}$　(B) $\frac{1}{4}$　(C) $\frac{1}{2}$　(D)1。

解　析：原式可寫為 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x+1)(x-1)}{(5x+3)(x-1)}\\ C\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{5x+3} &, x\neq 1\\ C &, x=1\end{cases}$

若 f 在 $x=1$ 連續，則 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$，即 $\frac{1+1}{5\times 1+3}=C$，得 $C=\frac{1}{4}$

參閱課本：數學 CⅣ《Ch2》P.110 例題 18

參閱講義：W04 講義《Ch13》P.358 教師講解 1

(B)24. 已知 L_1、L_2 為與直線 $3x+4y=0$ 平行的二直線。若 L_1 過點 $(-29,23)$，L_2 過點 $(31,23)$，則此二平行線間的距離為何？ (A)23 (B)36 (C)48 (D)60。

解析：令直線 L_1 為 $3x+4y=k_1$，過 $(-29,23)$，故 $k_1=3(-29)+4(23)$

直線 L_2 為 $3x+4y=k_2$，過 $(31,23)$，故 $k_2=3(31)+4(23)$

兩平行線距離為 $\dfrac{|k_1-k_2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|3(-29)+4(23)-[3(31)+4(23)]|}{5}=\dfrac{|3(-29-31)|}{5}=\dfrac{3\times 60}{5}=36$

參閱課本：數學 C I《Ch1》P.43 例題 21

參閱講義：W04 講義《Ch1》P.17 教師講解 5

(A)25. 已知 k 為實數，且二次方程式 $9x^2+(12k+18)x+(4k^2+12k+5)=0$ 有二實根。若其中一根大於 1，另一根小於 0，則 k 之範圍為何？ (A) $\dfrac{-5}{2}<k<-2$ (B) $-2<k<\dfrac{-3}{2}$ (C) $\dfrac{-3}{2}<k<-1$ (D) $-1<k<\dfrac{-1}{2}$。

解析：設 $9x^2+(12k+18)x+(4k^2+12k+5)=0$ 的兩根為 α、β，其中 $\alpha>1$、$\beta<0$，

原式可分解為 $[3x+(2k+1)][3x+(2k+5)]=0$，兩根為 $-\dfrac{2k+1}{3}$、$-\dfrac{2k+5}{3}$

其中 $-\dfrac{2k+1}{3}-(-\dfrac{2k+5}{3})=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{5}{3}=\dfrac{4}{3}>0$，故 $-\dfrac{2k+1}{3}>-\dfrac{2k+5}{3}$，

即令 $\alpha=-\dfrac{2k+1}{3}$、$\beta=-\dfrac{2k+5}{3}$，

$\alpha=-\dfrac{2k+1}{3}>1\Rightarrow -2k-1>3\Rightarrow -2k>4\Rightarrow k<-2$，

$\beta=-\dfrac{2k+5}{3}<0\Rightarrow -2k-5<0\Rightarrow -2k<5\Rightarrow k>-\dfrac{5}{2}$，

故得 $-\dfrac{5}{2}<k<-2$

參閱課本：數學 C I《Ch1》P.38 例題 15

參閱講義：W04 講義《Ch4》P.117 教師講解 2