104 年四技二專統一入學測驗試題

《數學(C)》

答案來源：技專校院入學測驗中心

啓芳出版社 提供

(D) 1. 已知 a , b 為實數，若不等式 $x^2+ax\le b$ 之解為 $-5\le x\le 3$，則 $a+b=$？ (A) -17 (B) -13 (C)13 (D)17

解 析：$-5\le x\le 3\Rightarrow (x+5)(x-3)\le 0\Rightarrow x^2+2x\le 15$

$\therefore a=2$，$b=15$

故 $a+b=17$

參閱講義：S01 講義《第 7 章 不等式及其應用》P.161 夫子講 4

(A) 2. 下列方程式所對應的圖形中，何者恆在 x 軸的上方？ (A) $y=5x^2-3x+1$ (B) $y=3x^2+5x-1$ (C) $y=x^2-5x+3$ (D) $y=3x^2+x-5$

解 析：(A) $D=(-3)^2-4\times5\times1=-11<0$，且領導係數 $5>0$ 開口向上

參閱講義：S01 講義《第 1 章 直線方程式》P.10 夫子講 9

(C) 3. 已知 33 位遊客在科學教育館參觀，他們的年齡及人數分佈如表(一)。若這群遊客年齡的中位數為 32 歲，則這群遊客中哪個年齡的人數最多？

(A)8 (B)12 (C)54 (D)60

表(一)

年齡(歲)	8	12	32	54	60	62
人數(人)	7	a	1	b	5	1

解 析：中位數在第 $\dfrac{33+1}{2}=17$ 位

$\therefore \begin{cases}7+a=16\\ b+5+1=16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=9\\ b=10\end{cases}$

故年齡 54 歲的人數最多

參閱講義：S01 講義《第 11 章 機率與統計》P.280 夫子講 4

(A) 4. 若二元一次方程組 $\begin{cases}2x+3y=-4\\ 3x-4y=5\end{cases}$ 的解為 $x=a$、$y=b$，則 $a+b=$？ (A) $\dfrac{-23}{17}$ (B) $\dfrac{-21}{17}$ (C) $\dfrac{21}{17}$ (D) $\dfrac{23}{17}$

解 析：$\begin{cases}2x+3y=-4\\ 3x-4y=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-1}{17}\\ y=\dfrac{-22}{17}\end{cases}$

$\therefore a+b=(\dfrac{-1}{17})+(\dfrac{-22}{17})=\dfrac{-23}{17}$

參閱講義：S01 講義《第 5 章 方程式》P.129 我來做 1

(C) 5. 將 $(x^4-3x^3+2x-5)(x^3-2)(x+3)$ 乘開化簡後，x^3 項的係數爲何？　(A) -5　(B) -3　(C)3　(D)5

解　析：$(x^4-3x^3+2x-5)(x^3-2)(x+3)$

$18x^3$　　$-15x^3$

$\therefore 18x^3-15x^3=3x^3$

故 x^3 項的係數爲 3

參閱講義：S01 講義《第 4 章　式的運算》P.94 夫子講 4

(C) 6. 已知 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$，則 $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=$？　(A) $2(\sqrt{3}-1)$　(B) $4(\sqrt{3}-1)$　(C) $2(\sqrt{3}+1)$　(D) $4(\sqrt{3}+1)$

解　析：求式 $=\dfrac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}+\dfrac{(1+\cos\theta)\sin\theta}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$

$=\dfrac{\sin\theta-\sin\theta\cos\theta}{1-\cos^2\theta}+\dfrac{\sin\theta+\sin\theta\cos\theta}{1-\cos^2\theta}$

$=\dfrac{2\sin\theta}{\sin^2\theta}=\dfrac{2}{\sin\theta}=\dfrac{2}{\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}}$

$=\dfrac{4}{\sqrt{3}-1}=2(\sqrt{3}+1)$

參閱講義：S01 講義《第 2 章　三角函數及其應用》P.33 夫子講 2

(C) 7. 若 $\sin\theta=\dfrac{1}{3}$，則 $\sqrt{2-2\cos 2\theta}=$？　(A) $\dfrac{1}{3}$　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　(C) $\dfrac{2}{3}$　(D) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

解　析：$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2(\dfrac{1}{3})^2=\dfrac{7}{9}$

$\sqrt{2-2\cos 2\theta}=\sqrt{2-2\times\dfrac{7}{9}}=\sqrt{\dfrac{4}{9}}=\dfrac{2}{3}$

參閱講義：S01 講義《第 2 章　三角函數及其應用》P.56 夫子講 5

(A) 8. 已知平面上四點坐標爲 $A(57,23)$、$B(7,-2)$、$C(5,12)$、$D(x,y)$。若向量 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{7}{4}\overrightarrow{AB}-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$，則 $x+y=$？　(A) -4　(B) -2　(C)2　(D)4

解　析：$\overrightarrow{AD}=\dfrac{7}{4}\overrightarrow{AB}-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\dfrac{7}{4}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})-\dfrac{3}{4}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

$\Rightarrow \overrightarrow{OD}=\dfrac{7}{4}\overrightarrow{OB}-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{OC}$

$\therefore (x,y)=\dfrac{7}{4}(7,-2)-\dfrac{3}{4}(5,12)=(\dfrac{17}{2},\dfrac{-25}{2})$

故 $x+y=\dfrac{17}{2}+(\dfrac{-25}{2})=-4$

參閱講義：S01 講義《第 3 章　向量》P.77 夫子講 5

(B) 9. 已知 $i=\sqrt{-1}$ 且 a , b 爲實數，若 $(2+i)(a+bi)=15+5i$，則 $a+b=$？ (A)4 (B)6 (C)8 (D)10

解　析：$a+bi=\dfrac{15+5i}{2+i}\times\dfrac{2-i}{2-i}=\dfrac{35-5i}{5}=7-i$

$\therefore a+b=7+(-1)=6$

參閱講義：S01 講義《第 6 章 複數》P.143 我來做 5

(D)10. 從 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 這八個數字中，任取 3 個相異數字，若每個數字被取中的機會均相等，則取出之 3 個數字中，最大的數字大於 6 的機率爲何？ (A) $\dfrac{5}{14}$ (B) $\dfrac{5}{12}$ (C) $\dfrac{7}{12}$ (D) $\dfrac{9}{14}$

解　析：$P(\text{最大數字 }7)+P(\text{最大數字 }8)=\dfrac{C_2^6}{C_3^8}+\dfrac{C_2^7}{C_3^8}=\dfrac{15+21}{56}=\dfrac{36}{56}=\dfrac{9}{14}$

參閱講義：S01 講義《第 11 章 機率與統計》P.255 我來做 5

(B)11. 若在聯立不等式 $\begin{cases}2x-y\ge 0\\ x+3y\le 7\\ x-4y\le 0\end{cases}$ 的條件下，目標函數 $f(x,y)=2x-3y-2$ 的最大值爲 M，最小值爲 m，則 $M+m=$？ (A) -5 (B) -3 (C)3 (D)5

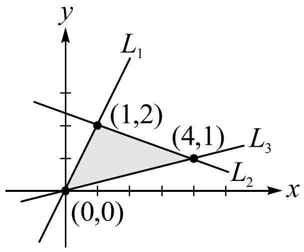
解　析：$f(x,y)=2x-3y-2$

$f(1,2)=2-6-2=-6$

$f(4,1)=8-3-2=3$

$f(0,0)=0-0-2=-2$

$\therefore M+m=3+(-6)=-3$



參閱講義：S01 講義《第 7 章 不等式及其應用》P.170 夫子講 6

(D)12. 求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2-h}}{h}=$？ (A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

解　析：$\lim\limits_{h\to 0}=\dfrac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2-h}}{h}\times\dfrac{\sqrt{2+h}+\sqrt{2-h}}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2-h}}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(2+h)-(2-h)}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2-h})}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2-h}}$

$=\dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

參閱講義：S01 講義《第 13 章 微積分及其應用》P.339 夫子講 2

(A)13. 求 $\int_{-3}^{3}(1-2x)(1+2x)\,dx=$？ (A) -66 (B) -33 (C)33 (D)66

解　析：求式 $=\int_{-3}^{3}(1-4x^2)dx$

$=2\int_{0}^{3}(1-4x^2)dx$

$=2(x-\dfrac{4}{3}x^3)\Big|_0^3$

$=2(3-36)=-66$

參閱講義：S01 講義《第 13 章 微積分及其應用》P.370 夫子講 2

(Ａ)14. 已知 m、n 為整數，若 $m\log_{500}5+n\log_{500}\sqrt{2}=1$，則 $m+n=$？ (A)7 (B)8 (C)9 (D)10

解　析：原式 $\Rightarrow \log_{500}5^m+\log_{500}\sqrt{2}^n=1$

$\Rightarrow \log_{500}5^m\times\sqrt{2}^n=\log_{500}500$

$\Rightarrow 5^m\times2^{\frac{n}{2}}=500$

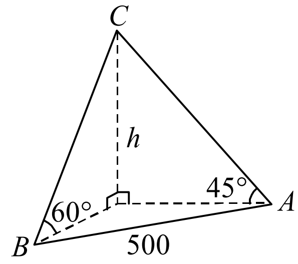
$\Rightarrow 5^m\times2^{\frac{n}{2}}=5^3\times2^2$

$\therefore m=3$，$n=4$

故 $m+n=7$

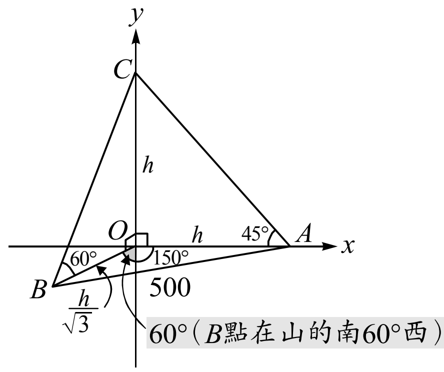
參閱講義：S01 講義《第 9 章 指數與對數》P.209 夫子講 8

(Ｂ)15. 今有人欲測一山的高度，當此人在此山的正東方一點 A，測得山頂 C 的仰角為 $45°$，又當他在山的南 $60°$ 西方向一點 B，測得山頂 C 的仰角為 $60°$，如圖(一)所示。若 A、B 兩點相距 500 公尺，則此山高 h 為多少公尺？ (A) $\frac{500}{3}\sqrt{3}$ (B) $\frac{500}{7}\sqrt{21}$ (C) $\frac{500}{3}\sqrt{21}$ (D) $500\sqrt{3}$



(圖一)

解　析：設 $\overline{OA}=\overline{OC}=h$，$\overline{OB}=\frac{h}{\sqrt{3}}$，如圖：



$\Rightarrow \angle AOB=90°+60°=150°$

由餘弦定理得

$500^2=h^2+(\frac{h}{\sqrt{3}})^2-2\times h\times\frac{h}{\sqrt{3}}\times\cos150°$

$\Rightarrow 500^2=h^2+\frac{h^2}{3}+h^2$

$\Rightarrow 500^2=\frac{7}{3}h^2$

$\Rightarrow h=\frac{500\sqrt{21}}{7}$

參閱講義：S01 講義《第 2 章 三角函數及其應用》P.65 夫子講 3

(Ａ)16. 已知 $P(a,1)$、$Q(-1,b)$ 為平面上兩點。若 P 為直線 $L:3x-4y=2$ 上一點，且直線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 與直線 L 垂直，則 $a+b=$？ (A)7 (B)9 (C)11 (D)13

解　析：① $P(a,1)$ 代入 L 得 $3a-4=2$ $\therefore a=2$

② $\because \overline{PQ}\perp L\Rightarrow m_{PQ}\times m_L=-1$

$\therefore m_L=\frac{3}{4}\Rightarrow m_{PQ}=-\frac{4}{3}$

即 $\frac{1-b}{a+1}=\frac{-4}{3}\Rightarrow 3-3b=-4a-4\Rightarrow b=5$

由①②得 $a+b=7$

參閱講義：S01 講義《第 1 章 直線方程式》P.13 夫子講 4

(C)17. 已知 a, b, c, d 爲實數，若 $2x^3+x^2-5x-3=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$ ，則 $abcd=$？

(A) -20　(B) -10　(C)10　(D)20

解　析：

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2 & 1 & -5 & -3 & \\
 & -2 & 1 & 4 & -1 \\
\hline
2 & -1 & -4 & 1 & \\
 & -2 & 3 & & \\
\hline
2 & -3 & -1 & & \\
 & -2 & & & \\
\hline
2 & -5 & & &
\end{array}
$$

$\therefore a=2$ ， $b=-5$ ， $c=-1$ ， $d=1$

故 $abcd=10$

參閱講義：S01 講義《第 4 章　式的運算》P.97 夫子講 10

(D)18. 已知四個正數 a, b, c, d 爲一等比數列，若 $a+b=20$ ， $a+b+c+d=65$，則 $a=$？　(A)5　(B)6　(C)7　(D)8

解　析：設 $b=ar$ ， $c=ar^2$ ， $d=ar^3$ ，公比 $r>0$

$a+b+c+d=65 \Rightarrow 20+c+d=65 \Rightarrow c+d=45$

$\therefore \begin{cases} a+b=20 \\ c+d=45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+ar=20 \\ ar^2+ar^3=45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(1+r)=20.......① \\ ar^2(1+r)=45...② \end{cases}$

$\dfrac{①}{②} \Rightarrow \dfrac{1}{r^2}=\dfrac{4}{9} \Rightarrow r^2=\dfrac{9}{4} \Rightarrow r=\dfrac{3}{2}$（$-\dfrac{3}{2}$ 不合）

代入①： $a+\dfrac{3}{2}a=20 \Rightarrow a=8$

參閱講義：S01 講義《第 8 章　數列與級數》P.185 夫子講 3

(D)19. 橢圓 $25x^2+16y^2-100x+32y-284=0$ 之兩焦點在哪兩個象限？　(A)一、二　(B)二、三　(C)三、四　(D)一、四

解　析：原式 $\Rightarrow 25(x^2-4x)+16(y^2+2y)=284$

$\Rightarrow 25(x-2)^2+16(y+1)^2=400$

$\Rightarrow \dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{(y+1)^2}{25}=1$

中心 $O(2,-1)$ 上下型橢圓

$a=5$ ， $b=4$ ， $c=3$

$\therefore$ 焦點爲 $F(2,2)$ ， $F'(2,-4)$

故焦點在第一、四象限

參閱講義：S01 講義《第 12 章　二次曲線》P.320 夫子講 2

(B)20. 已知 a , b 爲實數，若過函數 $f(x)=ax^2+bx$ 圖形上一點 $P(1,5)$ 的切線斜率爲 3，則 $f'(2)=$？

(A) -3　(B) -1　(C)1　(D)3

解　析：由題意知 $\begin{cases} f(1)=5 \\ f'(1)=3 \end{cases}$

$\because f'(x)=2ax+b$

$\therefore \begin{cases} a+b=5 \\ 2a+b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=7 \end{cases}$

得 $f'(x)=-4x+7$

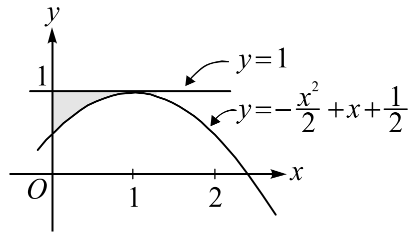
故 $f'(2)=-1$

參閱講義：S01 講義《第 13 章　微積分及其應用》P.352 夫子講 5

(D)21. 由 $y=-\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}$，$y=1$ 和 $x=0$ 所圍成的區域，如圖(二)陰影部分，則此區域面積可由下列何式求得？

(A) $\int_0^1(-\frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{2})\,dx$　(B) $\int_0^1(\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{2})\,dx$

(C) $\int_0^1(-\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2})\,dx$　(D) $\int_0^1(\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2})\,dx$



(圖二)

解　析：面積 $=\int_0^1[1-(-\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2})]dx$

$=\int_0^1(\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2})dx$

參閱講義：S01 講義《第 13 章　微積分及其應用》P.373 夫子講 8

(B)22. 若行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=2$，則 $\begin{vmatrix} a_1 & c_1+a_1 & b_1-2c_1 \\ a_2 & c_2+a_2 & b_2-2c_2 \\ a_3 & c_3+a_3 & b_3-2c_3 \end{vmatrix}=$？　(A) -4　(B) -2　(C)2　(D)4

解　析：

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1+a_1 & b_1-2c_1 \\ a_2 & c_2+a_2 & b_2-2c_2 \\ a_3 & c_3+a_3 & b_3-2c_3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\times(-1)} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1-2c_1 \\ a_2 & c_2 & b_2-2c_2 \\ a_3 & c_3 & b_3-2c_3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\times 2}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=-2$$

參閱講義：S01 講義《第 5 章　方程式》P.126 夫子講 7

(C)23. 已知 a , b 爲實數，且 $3^a=5$，$5^b=9$，則 $ab=$？　(A) $\log_{15}45$　(B) $\log_3 5$　(C)2　(D)3

解　析：$3^a=5\Rightarrow a=\log_3 5$

$5^b=9\Rightarrow b=\log_5 9$

$\therefore ab=\log_3 5\times\log_5 9=2$

參閱講義：S01 講義《第 9 章　指數與對數》P.208 夫子講 6

(D)24. 已知三角形的三邊長分別爲 3 公分、3 公分、4 公分，則此三角形之外接圓半徑爲何？

(A) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　(B) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$　(C) $\frac{7\sqrt{5}}{10}$　(D) $\frac{9\sqrt{5}}{10}$

解　析：$s=\frac{3+3+4}{2}=5$

$\triangle$ 面積 $=\sqrt{5(5-3)(5-3)(5-4)}=2\sqrt{5}$

$\because \triangle$ 面積 $=\frac{abc}{4R}$　$\therefore R=\frac{abc}{4\triangle}=\frac{3\times3\times4}{4\times2\sqrt{5}}=\frac{9\sqrt{5}}{10}$

參閱講義：S01 講義《第 2 章　三角函數及其應用》P.63 夫子講 10

(B)25. 將 6 顆相同紅球分給三個人且全部分完，若每人至少分到一顆紅球，則共有多少種分法？　(A)6　(B)10　(C)20　(D)27

解　析：先分給每人一顆紅球，剩三顆紅球任意分給三個人

$H_3^3=C_3^{3+3-1}=C_3^5=10$

參閱講義：S01 講義《第 10 章　排列與組合》P.234 夫子講 9